

Категорія Т перший курс

1. Нехай $\lfloor x \rfloor$ та $\lceil x \rceil$ означають найбільше ціле число з проміжку $(-\infty, x]$ та найменше ціле число з проміжку $[x, \infty)$ відповідно. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$P_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \quad \text{та} \quad Q_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lceil \frac{n}{i} \right\rceil.$$

Знайти $Q_{2022} - P_{2022}$.

2. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти всі дійсні числа x , при яких

$$A + A^2 + A^3 + \dots = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти всі значення x при яких

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & x+3 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & x+3 & 12 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n(n-1) & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Прямий круговий циліндр перетнули площиною, яка проходить під кутом 30° до його осі. Знайдіть ексцентриситет утвореного при перетині еліпса.
5. Многочлен 3-го степеня має дійсні корені $x_1 < x_2 < x_3$. Через точку $A(x_3, 0)$ проведено пряму, яка дотикається графіку цього многочлена в точці з абсцисою $x_0 \in [x_1, x_2]$. Знайдіть x_0 , якщо відомо, що $x_1 = \sqrt{2022}$, $x_2 = 2022$.
6. Нехай $P(x)$ — многочлен степені $m > 1$. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P\left(x + \frac{1}{n}\right)}{P(x)} \right)^n \right).$$